

## 1. Didaktische Vorbemerkungen

In LPE 5 werden gebrochenrationale Funktionen, Logarithmus-, Wurzel- sowie die Tangensfunktion behandelt. In der LPE 6 geht es darum, Stammfunktionen zu diesen Funktionstypen zu bestimmen. Dabei werden die Stammfunktionen mit geeigneten Hilfsmitteln gefunden und die Ergebnisse durch Ableiten überprüft.

Man kann sich beispielsweise folgendes Vorgehen vorstellen: Zunächst kann man die Schülerinnen und Schüler an einigen Beispielen versuchen lassen „von Hand“ Stammfunktionen zu den Funktionstypen aus LPE 5 zu bestimmen. Schnell wird deutlich werden, dass man auf diese Weise nicht sehr weit kommt. Abhilfe können folgende Möglichkeiten schaffen:

- Stammfunktionen werden mit Hilfe elektronischer Mathematikwerkzeuge bestimmt.
- Stammfunktionen werden in Integrationstabellen nachgeschlagen. Die dort angegebenen allgemeinen Integrale kann man beispielhaft an konkrete Beispiele anpassen.
- Aus der Kettenregel werden „einfache“ Integrationsformeln gewonnen, mit deren Hilfe Stammfunktionen bestimmt werden.

Die Integration bei linearer Verkettung kennen die Schülerinnen und Schüler schon aus dem regulären Mathematikunterricht. Dies kann man nun beispielhaft auf die Logarithmusfunktion übertragen.

Schöner wäre es natürlich, Stammfunktionen nicht vom CAS-System berechnen lassen zu müssen oder sie nachzuschlagen, sondern selbst berechnen zu können. Daher entsteht aus der Vorgehensweise in LPE 6 eine Motivation für das Wahlthema „Vertiefung der Integralrechnung“ der LPE 7.

## 2. Stammfunktionen mit Hilfe elektronischer Mathematikwerkzeuge

CAS-Systeme sind heute weit verbreitet. Ein kostenloses System stellt beispielsweise die Seite *wolframalpha.com* zur Verfügung.

Mit dem CAS-System kann man zu den Funktionstypen aus LPE 5 Stammfunktionen finden. Durch Ableiten „von Hand“ können die Schülerinnen und Schüler die Ausgaben des CAS-Systems überprüfen. Das auf diese Weise gewonnene Vertrauen in das System darf natürlich nicht so weit gehen, dass man anfängt, die Ergebnisse des Systems blind zu glauben.

Die Schülerinnen und Schüler können mit dem CAS verschiedene Funktionsterme „ausprobieren“ und sich auf diese Weise mit dem CAS-System und den Stammfunktionen vertraut machen. Abschließend wäre es beispielsweise denkbar, im Kurs arbeitsteilig eine Integrationstabelle für die wichtigsten Funktionen zu erstellen. Dabei könnte im Kurs die Frage diskutiert werden, welche Funktionen (und aus welchem Grund) in diese Tabelle aufgenommen werden sollten.

Versucht man mit Hilfe des CAS-Systems Stammfunktionen für vermeintlich einfache Funktionen wie etwa

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(x) = \frac{1}{\ln(x)} \quad (x > 0, x \neq 1)$$

zu bestimmen, so stellt sich heraus, dass diese keine elementaren Stammfunktionen besitzen. Damit ergibt sich eine Motivation zum zweiten Teil der LPE 6, den numerischen Verfahren zur Integration.

### 3. Stammfunktionen mit Hilfe von Integraltabellen

**3.1** In Integraltabellen findet man nicht immer ganz genau die Funktion, deren Stammfunktion man wissen will, oft ist eine gewisse „Anpassung“ des Funktionsterms nötig. In der „Tabelle der unbestimmten Integrale“ im Buch von Bronstein, Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“ findet man beispielsweise

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Anmerkung: Dabei ist zu beachten, dass Formelwerke und elektronische Hilfsmittel in der Regel die Integrationskonstante  $C$  weglassen. Formelsammlungen weisen auf diesen und andere systematische Fehler an zentraler Stelle hin. Die Integrationskonstante gehört immer dazu und muss selbst ergänzt werden.

Mit obiger Formel kann man zum Beispiel folgendes unbestimmte Integral lösen:

$$\int (1 - x) e^{-2x} dx.$$

Um die Formel anwenden zu können, muss man den Funktionsterm zerlegen, ehe man mit  $a = -2$  die in der Tabelle angegebene Beziehung verwenden kann:

$$\begin{aligned} \int (1 - x) e^{-2x} dx &= \int e^{-2x} dx - \int x e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{4} (-2x - 1) + C \\ &= \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \right) e^{-2x} + C. \end{aligned}$$

**3.2** Integrationstabellen können überraschende Fragen aufwerfen, wie es beispielsweise bei folgender Formel der Fall ist:

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin(2ax) + C.$$

Denn es stellt sich die Frage, wie man diese Formel durch Ableiten überprüfen kann, da sich zunächst einmal nur

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin(2ax) \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2ax)$$

ergibt. Aus dem Additionstheorem der Cosinusfunktion folgt

$$\cos(2ax) = \cos^2(ax) - \sin^2(ax).$$

Und damit

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2ax) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\cos^2(ax) - \sin^2(ax)).$$

Da  $1 = \cos^2(ax) + \sin^2(ax)$  ist, erhält man weiter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\cos^2(ax) - \sin^2(ax)) &= \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} (\cos^2(ax) - \sin^2(ax)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos^2(ax) + \sin^2(ax)) - \frac{1}{2} (\cos^2(ax) - \sin^2(ax)) \\ &= \sin^2(ax). \end{aligned}$$

#### 4. Stammfunktionen, falls der Zähler die Ableitung des Nenners ist

Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich die Regel:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C.$$

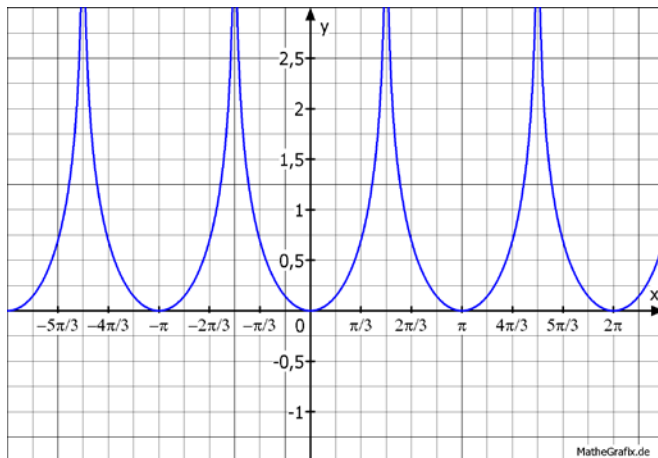
Man hat hier im Rahmen der LPE 6 eine Regel, die es möglich macht, eine Stammfunktion zu berechnen, statt sie nachschlagen zu müssen oder die Berechnung einem CAS-System zu überlassen.

**4.1** Eine direkte Anwendung dieser Regel hat man bei der Tangensfunktion:

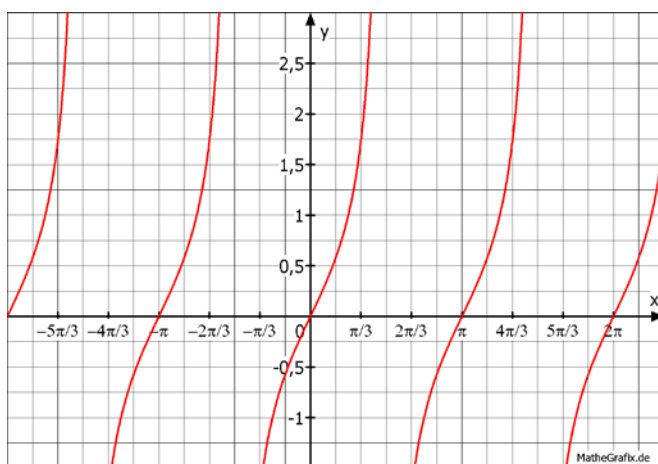
$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln(|\cos(x)|) + C.$$

Diese Stammfunktion gilt nur jeweils für einen Ast des Tangens. Man kann damit also beispielsweise nicht von 0 bis  $\pi$  integrieren.

Digitale Mathematikwerkzeuge lassen sich hier gut zur Veranschaulichung einsetzen. Die Schülerinnen und Schüler können sich anhand der gezeichneten Schaubilder verschiedene Zusammenhänge zwischen Funktion und Stammfunktion klar machen.



gezeichnet:  $F(x) = -\ln(|\cos(x)|)$



gezeichnet:  $f(x) = \tan(x)$

Beispielsweise hat das Schaubild von  $F$  bei  $T(-\pi|0)$  einen Tiefpunkt und das Schaubild von  $f$  hat an der Stelle  $x = -\pi$  eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von  $-$  nach  $+$ .

**4.2** Gebrochenrationale Funktionen, bei denen der Zähler die Ableitung des Nenners ist, lassen sich wie die Tangensfunktion behandeln:

$$\int \frac{4x + 3x^2}{2x^2 + x^3} dx = \ln(|x^3 + x^2|) + C.$$

Dabei muss der Integrand manchmal zuvor noch ein wenig umgeformt werden:

$$\int \frac{18x^2}{2x^3 + 1} dx = 3 \int \frac{6x^2}{2x^3 + 1} dx = 3\ln(|2x^3 + 1|) + C.$$

**4.3** Indem man die Formel für „Zähler ist Ableitung des Nenners“ ein wenig modifiziert, erhält man beispielsweise:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

Beispiel: Mit  $f(x) = e^{2x} + 2$  folgt aus dieser Regel:

$$\int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 2}} dx = 2\sqrt{e^{2x} + 2} + C.$$

## 5. Weitere Möglichkeiten

Ergänzend sind hier zwei weitere Beispiele aufgeführt (von vielen anderen denkbaren Möglichkeiten), wie man bei besonderen gebrochenrationalen Funktionen Stammfunktionen bestimmen kann.

**5.1** Hat der Nenner einer gebrochenrationalen Funktion die Form  $ax^n$ , so lässt sich die Funktion durch Zerlegung des Funktionsterms elementar integrieren, etwa

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - x^2 + x}{2x^3} dx &= \int \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(|x|) - \frac{1}{2x} + C. \end{aligned}$$

**5.2** Gebrochenrationale Integranden, deren Zähler und Nenner linear sind, lassen sich folgendermaßen integrieren:

$$\begin{aligned} \int \frac{ax + b}{cx + d} dx &= \int \left( \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cx + d} \right) dx \\ &= \frac{a}{c}x + \frac{bc - ad}{c^2} \ln(|cx + d|) + C. \end{aligned}$$

Die verwendete Zerlegung des Integranden kann man durch Nachrechnen verifizieren:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cx + d} &= \frac{a(cx + d)}{c(cx + d)} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)} \\ &= \frac{acx + ad + bc - ad}{c(cx + d)} \\ &= \frac{c(ax + b)}{c(cx + d)}. \end{aligned}$$

Ein Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - 3}{4x + 5} dx &= \int \left( \frac{1}{2} - \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{4x + 5} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{11}{8} \ln(|4x + 5|) + C. \end{aligned}$$

Eine Probe durch Ableiten bietet sich hier besonders an, nicht zuletzt mit Blick auf die Intentionen der LPE 6.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} x - \frac{11}{8} \ln(|4x + 5|) \right) &= \frac{1}{2} - \frac{11}{8} \cdot \frac{4}{4x + 5} \\ &= \frac{4x + 5}{2(4x + 5)} - \frac{11}{2(4x + 5)} \\ &= \frac{4x - 6}{2(4x + 5)} \\ &= \frac{2x - 3}{4x + 5}. \end{aligned}$$